$\sigma -$ cebir, Olasılık Ölçüsü ve Tesadüfi Değişken

Bu bölümde Stokastik sürecin alt yapısını oluşturan $\sigma -$ Cebir, olasılık uzayı ve tesadüfi değişkene ait tanımlar verilecektir.

Tanım 1.1. Ω herhangi bir küme olmak üzere, bu kümenin bazı alt kümelerinden oluşun yeni kümeye sınıf denir ve $\mathcal{F}$ ile gösterilir. Bir Ω kümesinin bütün alt kümelerinin oluşturduğu sınıfa o kümenin kuvvet kümesi denir ve $\sigma(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2. Ω boş olmayan bir küme $\mathcal{F}$ de Ω'da bir sınıf olsun ve eğer bu sınıf aşağıdaki özellikleri sağlarsa $\mathcal{F}$'e Ω da $\sigma -$ cebir denir. Ω'nın bazı alt kümelerinin oluşturduğu bir koleksiyona da sınıf denir.

1. $\Omega \epsilon \mathcal{F}$
2. $A \epsilon \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \epsilon \mathcal{F}$
3. $n = 1,2, \ldots$ için $A_n \epsilon \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \epsilon \mathcal{F}$.

Son özellik sonlu A_k'lar için doğruysa $\mathcal{F}$ sınıfına cebir denir. Eğer $\mathcal{F}$ sınıfı Ω da $\sigma -$ cebir ise $(\Omega, \mathcal{F})$ çiftine ölçülebilir uzay denir. Bir Ω kümesinin bütün alt kümelerinin oluşturduğu sınıfa o kümenin kuvvet kümesi denir. $\sigma -$ cebrinin her bir elemanına da olay denir. Her bir $\sigma -$ cebir aynı zamanda bir cebirdir, fakat bunun tersi doğru değildir. Yalnız sonlu elemanlı bir küme ise, her cebir de bir $\sigma -$ cebirdir.

Örnek 1. 1. $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ ve $\mathcal{F} = \{ \phi, \Omega, \{1\}, \{2,3\ 4\} \}$ olmak üzere $\mathcal{F}$ sınıfı bir cebirdir ve aynı zamanda bir $\sigma -$ cebirdir.

Örnek 1. 2. $\Omega = \{ \mathrm{a, b, c} \}$ olmak üzere $\sigma(\Omega) = \mathcal{F}$ ' in 2^n elemanı vardır. Yani 8 elemanı vardır.

$$\sigma(\Omega) = \mathcal{F} = \left\{ \phi, \Omega, \{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{b}\}, \{\mathrm{c}\}, \{\mathrm{a, b}\}, \{\mathrm{a, c}\}, \{\mathrm{b, c}\} \right\}$$

bir $\sigma -$ cebirdir.

1.2. Olasılık Ölçüsü ve Olasılık Uzayı

Tanım. $(\Omega, \mathcal{F})$ ölçülebilir uzay ve P fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\mathrm{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \ 1].$$

Eğer P fonksiyonu,

1) $\forall \ A \epsilon \mathcal{F}$ için $\mathrm{P}(A) \geq 0$,
2) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$,

3) A_n ler $\mathcal{F}$ de ayrık olayların bir dizisi olmak üzere

$$\mathrm{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

Özelliklerini sağlıyorsa , P fonksiyonuna $\mathcal{F}$ 'de bir olasılık ölçüsü denir. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ üçlüsüne de bir olasılık uzayı denir.

1.3. Tesadüfi Değişken

Tanım 1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ olasılık uzayı olmak üzere

$$X: \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$: w \ \longrightarrow X(w)$$

fonksiyonuna $\forall \ a \epsilon \ \mathbb{R}$ için, $\{w: X(w) \leq a\} \in \mathcal{F}$ özelliğini sağlıyorsa bu fonksiyona bir rastlantı değişkeni denir. Burada bir fonksiyonun ters görüntüsü tanımından

$$X^{-1}(-\infty, \ a] = \{w: X(w) \leq a\}$$

yukarıda tanımlanan fonksiyonun bir tesadüfi değişken olabilmesi için gerekli koşul, $\forall \ a \epsilon \ \mathbb{R}$, $X^{-1}(-\infty, \ a] \in \mathcal{F}$ olarak yazılabilir.

Örnek 1. 3. Üç paranın birlikte atılması deneyini düşünelim. $\mathcal{F}$ $\sigma -$ cebiride kuvvet kümesi olsun, ve olasılık ölçüsü de $A \epsilon \mathcal{F}$ için $\mathrm{P}(A) = n(A)/8$ olarak tanımlansın .$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ bir olasılık uzayıdır. Buradaki örnek uzayı(tüm sonuçlar kümesi) ,

$$\Omega = \{YYY, \ YYT, YTY, YTT, TYY, TTY, TYT, TTT\}.$$

Şimdi X fonksiyonu

$$X: \ \Omega \longrightarrow \mathcal{F}$$

$$X : \mathrm{w} \longrightarrow X(w) = \begin{cases} 0, & w = YYY \\ 1, & w = YYT, YTY, TYY \\ 2, & w = TTY, TYT, YTT \\ 3, & w = TTT \end{cases}$$

şeklinde verilsin(X gelen turaların sayısını göstersin). Bu fonksiyon bir tesadüfi değişkendir. Çünkü , $\forall \ a \epsilon \ \mathbb{R}$ için $X^{-1}(-\infty, \ a] = \{w: X(w) \leq a\} \epsilon \mathcal{F}$. Bunu şöyle gösterebiliriz:

$$a < 0 \ \ ise \ \ \{\mathrm{w}: \ X(w) \leq a\} = \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$0 \leq a < 1 \ \ ise \ \ \{\mathrm{w}: \ X(w) \leq a\} = \{YYY\} \in \mathcal{F}$$

$$1 \leq a < 2 \ \ ise \ \ \{\mathrm{w}: \ X(w) \leq a\} = \{YYY, YYT, YTY, TYY\} \in \mathcal{F}$$

$$2 \leq a < 3 \ ise \ \{\mathrm{w}: \ X(w) \leq a\} = \{YYY, YYT, YTY, YTT, TYY, TTY, TYT\} \in \mathcal{F}$$

$a \geq 3$ ise $\{ \mathrm{w}:\ X(w) \leq a\} = \Omega \in \mathcal{F}$

Yani yukarıda verilen fonksiyon (gelen tura sayısı) bir tesadüfi değişkendir.

Örnek 1. 4. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ olasılık uzayı olmak üzere $A \in \mathcal{F}$ olmak üzere X fonksiyonu

$$X:\ \Omega \longrightarrow \mathcal{F}$$
$$:\mathrm{w} \longrightarrow X(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu fonksiyona gösterge fonksiyonu(indikatör fonksiyon) da denir, ve genellikle $I_A(w)$ ile gösterilir. Bu fonksiyon bir tesadüfi değişkendir.

$a < 0$ *ise* $\{ \mathrm{w}:\ X(w) \leq a\} = \emptyset \in \mathcal{F}$

$0 \leq a < 1$ *ise* $\{ \mathrm{w}:\ X(w) \leq a\} = \bar{A} \in \mathcal{F}$

a $a \geq 1$ ise $\{ \mathrm{w}:\ X(w) \leq a\} = \Omega \in \mathcal{F}$